Méthodes multifractales appliquées à la prévision de pluie en utilisant des données radar

J. L. Macor^{1,2}, D. Schertzer^{1,3}, S. Lovejoy⁴

¹ CEREVE, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6-8, avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallee Cedex 02, (E-mail : *macor@cereve.enpc.fr*)

² FICH, Universidad Nacional del Litoral, Ciudad Universitaria, 3000 Santa Fe, Argentina

³ CNRM, Météo France, Paris

⁴ McGill U., Physics dept., 3600 University St., Montreal, Quebec H3A 2T8, Canada

Résumé

Dans les situations d'urgence, les systèmes hydrologiques d'alerte et de prévision exigent de plus en plus une information spatio-temporelle détaillée et des prévisions fiables de la pluie à très court terme. Le actuels modèles de prévision météorologiques ou les méthodes statistiques de traitement d'images radar et satellite ne peuvent pleinement répondre à ces exigences: nombreuses paramétrisations, temps de mise en ouvre et de calcul trop longs ou non prise en compte de la dynamique fortement non linéaire des cellules orageuses. L'approche multifractale, fondée physiquement sur les modèles de cascade, prend en compte la hiérarchie des structures et leurs interactions non linéaires sur une grande plage d'échelles spatio-temporelles, ainsi que l'anisotropie temps-espace. L'avantage de cette approche est qu'elle ne fait intervenir qu'un nombre très limité de paramètres, qui de plus ont une signification physique forte.

Nous présentons la mise en oeuvre d'une procédure de prévision multifractale de pluie utilisant des données radar pour déterminer le passé du générateur de la cascade. Nous comparons deux modes de prévision multifractale, respectivement stochastique et déterministe.

Mots-clés

Données radar; méthodes multifractales; prévision de pluie.

INTRODUCTION

Les précipitations, notamment la pluie, constituent un phénomène naturel qui a un très fort impact socio-économique, surtout lorsqu'elles ont un caractère torrentiel. Pour prendre en compte cet aspect, les systèmes hydrologiques d'alerte et de prévision ont besoin d'une information spatiotemporelle plus détaillée et des prévisions fiables de précipitation à très court terme. Ceci a une importance particulière dans des situations d'urgence (crues éclair, gestion de réseaux d'assainissement urbain, des barrages, etc.).

Les champs de nuages et de précipitations demeurent les champs les plus difficiles à simuler pour les actuels modèles de prévision météorologiques. En effet, les échelles spatio-temporelles de ces modèles restent largement supérieures à celles qui sont pertinentes pour les précipitations: les mécanismes des précipitations sont essentiellement paramétrisés et les pluies ne sont estimées que sur des échelles relativement grossières. De plus, le temps de mise en route de ces modèles est souvent prohibitif pour des prévisions à court terme.

Différentes méthodes statistiques de traitement des images satellites et radar ont été développées pour combler ce déficit de prévision. Ces méthodes prennent en compte nombre d'informations à petite échelle, mais elles n'ont pas de base physique, en particulier elles ne prennent pas en compte la dynamique fortement non linéaire des cellules orageuses.

Une alternative permettant a priori de dépasser, à l'aide des méthodes multifractales, les limites des précédentes méthodes a été récemment considérée. Elle est fondée sur les modèles de cascade et prend en compte la hiérarchie des structures ainsi que leurs interactions non linéaires sur une grande gamme d'échelles spatio-temporelles et l'anisotropie temps-espace. Fondamentalement, les

processus de cascade développent des gradients de contenu en eau de plus en plus grands sur des fractions de plus en plus petites de l'espace physique. Ce type de modèles a l'avantage d'avoir un nombre limité de paramètres qui ont une signification physique forte et peuvent être évalués soit théoriquement, soit empiriquement.

Nous présentons la mise en oeuvre d'une procédure correspondant à cette alternative et son application à l'événement orageux du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, en utilisant des données radar pour déterminer le passé du générateur de la cascade. Nous discutons deux modes de prévision: l'un correspondant à une paramétrisation stochastique des petites échelles du futur, l'autre à une paramétrisation déterministe.

CAS D'ETUDE

Le cas d'étude considéré est l'orage du 8 au 9 septembre 2002 qui a touché Nîmes dans la région méditerranéenne des Cévennes, au sud de la France. Des valeurs de taux de pluie assez exceptionnelles ont été mesurées, notamment supérieures à 680 mm. Le passage de cet événement a provoqué des pertes de vies humaines, de très importants dommages sur les infrastructures et des pertes économiques considérables.

Notre travail a essentiellement porté sur une série de 256 images, fournie par la Direction de la Climatologie de Météo-France, de la réflectivité de pluie du radar (bande S) de Nîmes. La période des images est de 5 minutes et chacune a 256x256 pixels ayant chacun une résolution spatiale de l'ordre du kilomètre, La période d'analyse commence à 11h30 le 8 septembre et finit à 8h45 le 9 septembre. La réflectivité de pluie (Z) est par convention transformée en taux de pluie (R en mm/h) à l'aide de la formule de Marshall et Palmer (1948):

 $Z = aR^b$

(1)

avec les valeurs 'classiques' des paramètres a = 200, b = 1.6. Nous ne discuterons pas ici, les limites de cette formule (ex. Duncan et al. (1992)), car rien ne prévient d'appliquer cette méthode à d'autres estimations du champ de pluie.

L'APPROCHE MULTIFRACTALE

Aspect théorique

L'approche multifractale a pour base physique la notion de cascade suggérée par Richardson (1922) comme pilotant la dynamique atmosphérique: les grosses structures se cassent en plus petites structures en leur transférant leur énergie, et cela se répète jusqu'à l'échelle de la viscosité moléculaire, qui est de l'ordre du millimètre. Dans les modèles de cascades les plus simples (Kolmogorov, 1962; Yaglom, 1966; Novikov et Steward, 1964), un facteur aléatoire détermine la fraction de flux transmis d'un tourbillon à chacun de ses sous-tourbillons, De plus, ces facteurs sont tous indépendants. Le cas le plus caricatural est le β -modèle (Mandelbrot, 1974; Frisch et al. 1978) qui a un seul niveau d'activité et par conséquent une seule dimension fractale caractérisant la concentration du flux d'énergie sur une fraction extrêmement ténue de l'espace. Mais ce caractère mono-fractal est non générique: la simple introduction de deux niveaux d'activité dans un pas de la cascade (le α -modèle, Schertzer et Lovejoy, 1984; Levitch et Tzvetkov, 1985; Bialas et Peschanski, 1986), génère tout un spectre de niveaux d'activité et par conséquent une hiérarchie (infinie) de dimensions fractales caractérisant la concentration respective de chacun de ces niveaux d'activité. D'où le terme multifractal (Parisi et Frisch, 1985). De facon plus précise, la probabilité qu'un taux de pluie multifractale R_{λ} dépasse un certain seuil λ^{γ} , est donnée par (Schertzer et Lovejoy, 1987): $\Pr(R_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma}) = \lambda^{-c(\gamma)}$ (2)

où $c(\gamma)$ ($c(\gamma) \ge 0$) est la co-dimension statistique de l'événement $R \ge \lambda^{\gamma}$. Si le champ est mono-fractal, $c(\gamma)$ est constant. Si $c(\gamma) < d$, où d est la dimension (usuelle) de l'espace physique, d- $c(\gamma)$ est (presque

sûrement) la dimension fractale du support de $R \ge \lambda^{\gamma}$. Souvent, il est plus facile d'utiliser la propriété équivalente des moments statistiques:

$$\left\langle R_{\lambda}^{q}\right\rangle pprox \lambda^{K(q)}$$

(3)

(6)

où q est l'ordre du moment statistique et K(q) est la fonction d'échelle des moments statistiques. De façon générale, il faut une infinité de paramètres (ex. la fonction $c(\gamma)$ ou K(q)) pour caractériser un champ multifractal. Cependant, les « multifractals universels » (Schertzer et Lovejoy, 1987), qui, par une très large généralisation « multiplicative » du théorème limite centrale, correspondent aux limites stables et attractives de processus multifractals identiquement indépendamment distribués interagissant non linéairement, sont définis par seulement trois paramètres:

- l'exposant *H* qui mesure le degré de non conservation du champ (*H*=0 pour un champ conservatif),
- la co-dimension fractale C_1 qui mesure l'hétérogénéité du champ ($C_1=0$ pour un champ hétérogène),
- l'index de multifractalité α ($0 \le \alpha \le 2$) qui mesure combien multifractal est le champ ($\alpha=0$ pour un champ monofractal, $\alpha=2$ pour le cas (improprement) appelé lognormal.

La fonction d'échelle des moments statistiques K(q) et la fonction co-dimension $c(\gamma)$ des multifractals universels ont les expressions analytiques suivantes:

Analyse spectrale

Le spectre d'énergie est un moyen commode (par ex.: Schertzer et Lovejoy, 1993, de Lima, 1998) pour obtenir de premières estimations du paramètre multifractal H. En effet, le spectre d'énergie E(k) (k étant le nombre d'onde) a une pente spectrale constante β sur la gamme d'invariance d'échelle du champ:

$$E(k) \approx k^{-\beta} \tag{5}$$

et en outre, du fait que le spectre est la transformée de Fourier de la covariance: $\beta = 1 + 2H - K(2)$

Un processus conservatif exige non seulement H=0, mais également $K(2)\ge K(1)=0$, donc que $\beta<1$. Réciproquement, β -1 peut être considéré comme approximation de 2H en négligeant K(2). Cette première estimation peut être utilisée pour estimer une quantité conservative, appelée le flux, par une dérivation fractionnaire d'ordre H. La figure 1a présente le spectre individuel de quelques images radar, la figure 1b montre le spectre moyen de toute la série d'images. Pour k>15, la pente spectrale est $\beta\approx1.69$, donc la série analysée n'est pas conservative et $H\approx1/3$ (Macor et al., 2006).

La Méthode du Double Moment Trace

Le 'Double Moment Trace' (DTM, Double Trace Moment) (Lavallée et al., 1991) est une méthode efficace et simple pour estimer directement les paramètres α et C_1 . On commence par élever à différentes puissances η le champ ε_A originalement observé à la résolution Λ . On agrège ensuite ces différents champs ε_A^{η} par des moyennes successives, donc on évaluent des champs $\varepsilon_{\lambda}^{(\eta)}$ à des résolutions $\lambda < \Lambda$) de plus et plus petites faibles. Les moments d'ordre q de ces champs $\varepsilon_{\lambda}^{(\eta)}$ sont alors calculés. Pour les processus multifractals universels, la loi d'échelle $K(q, \eta)$ des moments statistiques de $\varepsilon_{\lambda}^{(\eta)}$ satisfait:

$$K(q,\eta) = \eta^{\alpha} K(q) \tag{7}$$

Figure 1. Analyse spectrale. 1a) Spectre d'énergie individuel de cinq images radar. 1b) Spectre d'énergie moyen des 256 images de la série.



Nous utilisons cette équation en variant systématiquement η , pour diverses valeurs de q (q=1.2 1.5, 2.0 et 2.5). En représentation log-log, pour chaque valeur fixée de q, $K(q,\eta)$ est une droite de pente α , et le paramètre C_1 peut se déduire de l'intersection $K(q,\eta)$ avec $\eta=1$:

$$C_1 = K(q) \frac{\alpha - 1}{q^{\alpha} - q} \tag{8}$$

Dans notre cas, les paramètres multifractals universels peuvent être déduits de la figure 2. Pour des résolutions λ variant entre 1 et 256 on trouve α =0.84±0.02 et C_1 =0.44±0.02.

Divergence des moments

La figure 3 présente en log-log la probabilité de l'intensité de pluie *R* de dépasser un seuil fixé *r*. Un comportement asymptotique en loi de puissance a été ajusté par une régression linéaire (en log-log). La pente de cette asymptote est une estimation de l'ordre critique de divergence des moments $q_D=3.0$: les moments théoriques (cet à dire avec un échantillon infini) sont infinis pour tous les ordres $q \ge q_D$. Cette estimation peut être comparée avec celles obtenues par des analyses similaires. Duncan et al. (1992) ont trouvé la même valeur $q_D=3.0$, alors que Schertzer et Lovejoy, (1987) ont obtenu une $q_D=1.7$, pour d'autres données radar. Par contre, une valeur similaire a été obtenue par Ladoy et al. (1993) dans une analyse multifractale des données pluviométrique de pluie à Nîmes. La divergence des moments pour $q \ge q_D$ se retrouve dans l'asymptote linéaire de la fonction

empirique K(q) d'échelle des moments statistiques (figure 4). L'apparition de cette asymptote à partir de $q_D\approx3$ peut être comprise comme une transition de phase multifractale (Schertzer et Lovejoy, 1992). La fonction K(q) théorique (ligne pleine) obtenue pour $\alpha=0.84$ et $C_1=0.44$ en utilisant l'équation (3) est très proche de la courbe expérimentale pour des valeurs de q compris entre $q_{\min}=0.7$ et q=3.0, mais ne l'est plus après cette dernière valeur.

Anisotropie spatio-temporelle

L'analyse spatio-temporelle est effectuée entre une direction d'espace et celle du temps. L'objectif est de déterminer l'exposant d'écart à l'anisotropie H_t ($H_t=0$ pour une isotropie), qui relie la durée τ des phénomènes à leur extension spatiale *l* par une loi d'échelle $\tau = l^{(l-Ht)}$, est indispensable pour le développement de cascades spatio-temporelles. La méthode utilisée (Marsan, 1998; Biaou, 2004) consiste à calculer les fonctions d'échelle des moments statistiques $K_x(q)$ et $K_t(q)$ correspondant à des coupes spatio-temporelles le long respectivement des axes *x* et *t*. L'exposant d'anisotropie peut être estimé à l'aide de la relation suivante (figure5):

$$K_x(q) = \frac{K_t(q)}{1 - H_t} \tag{9}$$

De façon analogue on peut estimer H_t par rapport à l'autre direction de l'espace. Dans notre cas la valeur moyenne de H_t a été trouvé $H_t \approx 0.33$, ce qui est en très bon accord avec la valeur théorique 1/3 d'une cascade turbulente pilotée par la dynamique.

q=1.2, 1.5, 2.0 et 2.5. Les pentes des droites correspondent au paramètre α =0.84.



Figure 4. Graphique K(q) vs q. La droite à ligne pointillée est la K(q) empirique en tant que la ligne pleine es la K(q) théorique pour $\alpha = 0.84$.



Figure 2. Graphique log-log de K(q) vs η pour **Figure 3.** Probabilité $Pr(R \ge r)$ de dépasser un seuil d'intensité de pluie fixé r pour les 256 images radar.



Figure 5. Anisotropie: $K_x(q)$ vs $K_t(q)$ pour les directions x et t. L'inverse de la pente de cette relation conduise à $H_t \approx 0.33$.



MODELE DE PREVISION

Simulation d'un champ multifractal

Les modèles de cascade opèrent avec un générateur invariant d'échelle qui agit depuis l'échelle la plus grande à l'échelle la plus petite. Pour produire des cascades multiplicatives continues on considère le processus additif défini par le logarithme du champ à une résolution finie λ . Ici, nous nous contenterons de mentionner que la limite (pour la résolution tendant vers l'infini) d'un tel processus n'a rien de trivial (Schertzer et Lovejoy, 1987). Ainsi, nous définissons le générateur Γ_{λ} à la résolution λ du champ multifractal ε par la relation:

$$\varepsilon_{\lambda} = e^{\Gamma_{\lambda}}$$

(10)

Pour avoir un comportement en loi d'échelle, de fait multifractal, le générateur peut-être pris comme résultant d'une convolution d'un bruit blanc S_{λ} , appelé sous-générateur, par un noyau de convolution en loi de puissance g_{λ} :

$$\Gamma_{\lambda} = g_{\lambda} * S_{\lambda} \tag{11}$$

Cette convolution (en fait une intégration «fractionnaire») peut-être numériquement réalisée à l'aide d'une transformée de Fourier rapide, puisque:

(12)

$$\Gamma_{\lambda} = F^{-1}(F(g_{\lambda}) F(S_{\lambda}))$$

Dans le cas des multifractals universels, S_{λ} est un bruit blanc de Lévy (avec une anti-symétrie maximale) et le noyau de convolution est:

$$g_{\lambda} = \left\| \overline{x}, t \right\|^{-Del/\alpha} \tag{13}$$

où $Del=d+1-H_t$ est la dimension elliptique (dimension effective du domaine espace-temps de notre processus), d est la dimension spatiale et || || est une échelle spatio-temporelle telle que: $||\lambda \bar{x}, \lambda^{1-H_t}t|| = \lambda ||\bar{x}, t||$

L'équation (10) définit un champ conservatif ε_{λ} à partir du générateur Γ_{λ} . Pour obtenir un champ non-conservatif $R_{\lambda}(H\neq 0.)$, typique des processus géophysiques, on peut effectuer une nouvelle convolution:

$$R_{\lambda} = G_{\lambda} * \varepsilon_{\lambda} \tag{14}$$

dont le noyau G_{λ} est défini par:

$$G_{\lambda} = \left\| \bar{x}, t \right\|^{-Del+H} \tag{15}$$

La figure 6 montre un exemple de simulation d'un champ de précipitation. Le coté gauche illustre le processus de simulation commençant par un bruit blanc qui est coloré par convolution pour obtenir le générateur, puis par exponentiation le flux conservatif qui est à son tour convolé pour obtenir le champ de précipitation. Le coté droit illustre le processus inverse par des déconvolutions correspondantes. Nous sommes actuellement en train d'améliorer le schéma numérique d'inversion pour réduire les instabilités numériques à l'origine des différences entre les deux générateurs.

Prévision multifractale

Pour effectuer des prévisions multifractales, nous exploitons le fait qu'au coeur d'un processus multifractal universel il y a un bruit blanc de Lévy, le sous-générateur S_{λ} , dont le futur est indépendant du passé. Une première étape correspond à inverser la simulation afin d'estimer le sous-générateur passé $S_{\lambda,p}$. à partir des observations passées (dans le cas d'étude, la série des données radar de pluie). Nous avons mentionné que cela pose plusieurs questions techniques du fait des instabilités numériques générées par les inversions.

La deuxième étape, plus aisée, correspond à une simulation effectuée à partir du sous-générateur complété sur la période (future) de prévision: $S_{\lambda} = S_{\lambda,p} + S_{\lambda,f}$, où $S_{\lambda,p}$ est déterminé dans la

précédente étape. Deux options assez évidentes (illustrées en figure 7):

- une prévision (ou paramétrisation sous-maille) stochastique: S_{λ,f} est un bruit blanc de Lévy avec les valeurs des paramètres α et C₁ correspondant aux estimations faites sur S_{λ,p} (ici: α=1.5, C1=0.2, H=0.1). En d'autres termes on prolonge de manière stochastique le passé pour conserver les mêmes règles (à travers les échelles spatio-temporelles) d'interaction et de destruction des structures.
- Une prévision (ou paramétrisation sous-maille) déterministe: $S_{\lambda,f}$ est défini de façon déterministe pour conserver le flux à travers les échelles.

Le contraste entre ces deux options est assez évident en figure 7, où la réalisation A sert de référence et les trois réalisations ont le même passé (t \leq 0). La réalisation B correspond à une prévision stochastique à partir de ce passé, C à une prévision déterministe. On note que B a une

variabilité multiéchelle de même type que celle de A, car effectivement des petites échelles sont générées dans le futur, ce qui n'est pas le cas pour C.



Figure 6. Simulation d'un champ de précipitation.

Figure 7. Illustration de deux modes de prévision.



CONCLUSIONS

Nous commençons à explorer une nouvelle technique qui est en même temps:

- basée physiquement sur la hiérarchie spatio-temporelle des structures,
- capable d'utiliser directement des bases données télédétectées (radar météorologique, satellite)

• capable de contrôler les incertitudes et les pertes de prévisibilité

Ces techniques seront particulièrement utiles pour aider à résoudre les présents problèmes d'inondation et de gestion de l'assainissement urbain, en donnant des prévisions de précipitation distribuées et à haute résolution.

REFERENCES

Bialas A. et Peschanski R. (1986). Moments of rapidity distributions as a measure of short-range fluctuations in high-energy collisions, *Nucl. Phys B*, **273**, 703-718.

Biaou, A. (2004). *De la meso-échelle à la micro-échelle: desegregation spatio-temporelle multifractale des précipitations*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.

De Lima M. I. P. (1998). *Multifractal and temporal structure of rainfall*. PhD thesis, Wageningen Agricultural University of Wageningen.

Duncan M., Lovejoy S., Fabry F. et Schertzer D. (1992). Fluctuating radar cross-section of a multifractal distribution of scatterers, *Proc. 11th Int. Conf. on Precipitation and Clouds*, Montreal, pp. 997-1000.

Frisch U., Sulem P. L. et Nelkin M. (1978). A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.*, **87**, 719-724.

Kolmogoroff A. N. (1962). A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **13**, 82-85.

Ladoy Ph., Schmitt F., Schertzer D. et Lovejoy, S.(1993). Variabilité temporelle multifractale des observations pluviométriques à Nîmes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **317**, Ser. II, pp.775-782.

Lavallée D., Lovejoy S., Schertzer D. et Ladoy P. (1993). Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: *Fractals in geography*, L. De Cola et N. Lam (eds.), pp. 171-205.

Levitch E. et Tzvetkov E. (1985). Helical inverse cascade in three-dimensional turbulence as a fundamental dominant mechanism in mesoscale atmospheric phenomena, *Phys. Rep.*,**128**(1), 1-137. Mandelbrot B. (1974). Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.*, **62**, 331-358.

Macor J., Schertzer D. et Lovejoy S. (2006). Rain and Flood Multifractal Nowcasting Using Radar Data. Natural Hazards and Earth Systems Sciences, European Geosciences Union (en preparation).

Marsan D (1998). *Multifractals espace-temps, dynamique et prédicibilité; application aux précipitations*. PhD thesis, Université Paris 6.

Marshall J. S. et Palmer W. M. (1948). The distribution of rain-drops with size, J. Meteor., 5(4), 165-166.

Novikov E.A. et Steward R. (1964). Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy dissipation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geofiz.*, **3**, 408-412.

Richardson L. F. (1922). Weather prediction by numerical processes, republié par Dover, 1965.

Schertzer D. et Lovejoy, S. (1984). On the dimension of atmospheric motions. In: *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*, T. Tatsumi (ed.), Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, pp. 505-512.

Schertzer D. et Lovejoy S (1985). The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. In: *Turbulent Shear Flow 4*, B. Launder (ed.), Springer-Verlag, Berlin, pp 7-33.

Schertzer D. et Lovejoy S. (1987). Physical modeling and analysis of rain and clouds by anysotropic scaling of multiplicative processes, *J. Geophys. Res.*, **92**(D8), 9693-9714.

Schertzer D. et Lovejoy S. (1994). EGS Richardson AGU Chapman NVAG3 Conference: Nonlinear Variability in Geophysics: scaling and multifractal processes, *Nonlinear Processes in Geophysics*, **1** 2/3, 77-79

Yaglom A. M. (1966). The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval, *Sov. Phys. Dokl.*, **2**, 26-30.