

Interprétation multifractale des courbes intensité–durée–fréquence des précipitations

Multifractal point of view on rainfall intensity–duration–frequency curves

Hocine BENDJOUDI¹, Pierre HUBERT², Daniel SCHERTZER³ et Shaun LOVEJOY⁴

¹ Laboratoire de géologie appliquée, Université Pierre-et-Marie-Curie ;

² UMR-CNRS Sisyphe, École des mines de Paris, Fontainebleau ;

³ Laboratoire de météorologie dynamique, Université Pierre-et-Marie-Curie, case 123, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France ;

⁴ Département de physique, Université Mc-Gill, Montréal, Canada

RÉSUMÉ

Établies empiriquement à partir de séries chronologiques de précipitations ponctuelles, les courbes intensité–durée–fréquence sont très utiles pour la réalisation de nombreux projets. Il est possible de caractériser les propriétés multifractales de ces séries de données par des paramètres universels. Les propriétés multifractales d'invariance d'échelle permettent alors d'établir les équations formelles des courbes intensité–durée–fréquence, qui ne dépendent que d'un nombre réduit de paramètres. Une base rationnelle peut ainsi être donnée aux courbes intensité–durée–fréquence.

Mots clés : Précipitations, Courbes intensité–durée–fréquence, Multifractals, Invariance d'échelle

ABSTRACT

Intensity–duration–frequency curves, which are very useful for many design applications, are generally empirically drawn from point rainfall time series. Such point time series can also be analyzed from a multifractal point of view and universal parameters characterizing the series can be estimated from empirical data. We derived from the scale invariant relationship of multifractals the formal equations of intensity–duration–frequency curves, which depend on only a small number of the series multifractal parameters. A rational basis is thus given to these curves, which can be related to some objective parameters.

Keywords: Rainfall, Intensity–Duration–Frequency Curves, Multifractals, Scaling

I. Les courbes intensité–durée–fréquence

Dans de nombreuses applications, telles qu'entre autres, le calcul des réseaux d'évacuation des eaux pluviales (Guerrée et Gomella, 1982), on a besoin de déterminer une « pluie de projet » (Eichert et al., 1985). Cette détermination peut se faire à partir des courbes intensité–durée–fréquence (Idf).

Ces courbes donnent, pour une durée continue d (échelle à laquelle sont effectuées les observations et qui

peut aller de quelques minutes à plusieurs années), la probabilité p_d pour que l'intensité i_d (exprimée en hauteur de pluie par unité de temps) dépasse un seuil d'intensité s_d . A cause du cycle annuel, l'usage s'est imposé de traduire les fréquences en durées moyennes de retour T , elles-mêmes exprimées en années. Un événement de durée de retour T « revient », en moyenne toutes les T années. On parlera ainsi de pluie décennale, centennale, etc.

Traditionnellement, ces courbes sont établies empiriquement, en traçant, pour chaque valeur T de la période

Note présentée par Georges Pédro

Note remise le 24 mars 1997, acceptée après révision le 20 mai 1997

moyenne de retour, la courbe liant le seuil s_d à la durée d . La figure donne un exemple de telles courbes établies pour la région bordelaise à partir des pluviogrammes de l'observatoire de Bordeaux-Floirac relatifs à la période 1912-1941 (Farthouat, 1962). Une démarche analogue peut être entreprise pour les débits d'un cours d'eau. C'est le cas des modèles débit-durée-fréquence (Qdf : Galéa et Prudhomme, 1994, 1997).

En coordonnées log-log, et pour un large intervalle de valeurs de la durée d , les courbes Idf des pluies ont l'allure de droites parallèles dont l'ordonnée à l'origine dépend de la période moyenne de retour T . On passe ainsi d'une courbe à l'autre par une simple translation.

Cette disposition suggère une expression analytique simple pour l'équation de ces courbes et on en trouve de nombreuses dans la littérature (Réméniéras, 1985, Raudkivi, 1979) sous la forme de relations empiriques telles que :

$$s_x = K T^m / d^n \tag{1}$$

où s_x est l'intensité moyenne maximale pour la durée de référence d (5 min à 1 an) ; T est la durée moyenne de retour de 1 à 100 ans ; K , m , et n étant des paramètres d'ajustement.

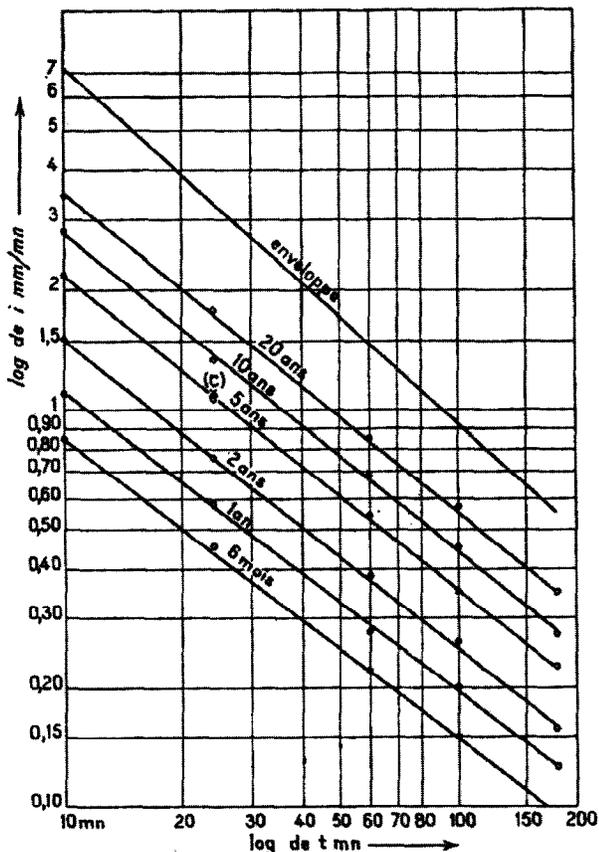


Figure. Exemple de courbes intensité-durée-fréquence (Farthouat, 1962).

Example of intensity-duration-frequency curves.

En passant aux logarithmes, la relation (1) peut s'écrire :

$$\log s_x = m \log T - n \log d + \log K \tag{2}$$

II. Probabilité de dépassement et résolution

Si l'échelle d'observation des probabilités est annuelle, la durée moyenne de retour, exprimée en années, est égale à l'inverse de la probabilité, mais il est possible de relier probabilité et durée de retour pour une échelle d'observation des probabilités quelconque, et en particulier celle de l'échelle de la durée d .

Appelons λ le rapport entre l'échelle annuelle et l'échelle de la durée d :

$$\lambda = 1/d \tag{3}$$

d étant exprimée en années, λ est un nombre sans dimension d'autant plus grand que la résolution est plus fine. Dans la suite, on parlera indifféremment de résolution ou de facteur d'échelle.

A la résolution λ , la probabilité p_λ pour que l'intensité observée i_λ dépasse un seuil s_λ peut être exprimée par le rapport entre le nombre d'événements pour lesquels $i_\lambda > s_\lambda$ et le nombre total d'événements, ou ce qui revient au même :

$$p_\lambda = Pr [i_\lambda > s_\lambda] = 1/\lambda T \tag{4}$$

où T est la période moyenne de retour correspondante exprimée en années.

Les relations intensité-durée-fréquence peuvent alors s'écrire sous la forme générale :

$$s_\lambda = f(p_\lambda, \lambda) \tag{5}$$

III. Fractals et multifractals

Revenons aux courbes intensité-durée-fréquence. La relation (2) montre qu'à une translation près, la relation entre le seuil d'intensité et la période moyenne de retour est indépendante de l'échelle d'observation. Nous nous proposons de montrer que cette propriété d'invariance d'échelle n'est pas fortuite et qu'elle peut être reliée à la nature multifractale des précipitations, qui a déjà fait l'objet de nombreuses analyses et modélisations (pour revue : Lovejoy et Schertzer, 1995).

Le passage de la géométrie fractale aux champs multifractals est très bien illustré par des études effectuées sur les pluies du Sahel africain. Le caractère fractal de l'occurrence de ces pluies a été mis en évidence par Hubert et Carbonnel (1988, 1989). Cependant, l'occurrence est définie par référence à un seuil d'intensité de la précipitation, et la dimension fractale (Mandelbrot, 1983) de l'ensemble observé décroît, lorsque le seuil de référence augmente (Hubert et al, 1995). L'approche multifractale,

dont les modèles ont été développés pour l'étude des phénomènes de turbulence (cascades multiplicatives, Schertzer et Lovejoy, 1987), permet de surmonter ce problème en prenant en compte à la fois les échelles d'observation et les intensités correspondantes.

L'occurrence des précipitations dépend aussi de la résolution à laquelle sont effectuées les observations. L'idée essentielle est que les seuils doivent être considérés sous l'angle de l'invariance d'échelle. Nous relierons le seuil à la résolution (ou à l'échelle) par la relation :

$$s_\lambda = \lambda^\gamma \quad (6)$$

où γ est un ordre de singularité (Schertzer et Lovejoy, 1987).

La relation de base des multifractals peut être exprimée en termes de probabilités (Schertzer et Lovejoy, 1987) par l'expression :

$$p_\lambda = Pr(i_\lambda \geq \lambda^\gamma) = A_\lambda \lambda^{-c(\gamma)} \quad (7)$$

où A_λ est un préfacteur variant très peu avec λ et où p_λ est la probabilité pour que l'intensité i_λ , observée à la résolution λ , dépasse le seuil λ^γ .

La fonction $c(\gamma)$ caractérise l'invariance d'échelle de la distribution de probabilité. On montre que $c(\gamma)$ est croissant, ce qui correspond au fait que les précipitations les plus intenses sont les plus rares. Plus précisément $c(\gamma)$ a en général (Schertzer et Lovejoy, 1992) le sens d'une codimension définie comme la différence entre la dimension euclidienne de l'espace support et la dimension fractale de l'ensemble des observations. On notera que, plus cette codimension est proche de la dimension de l'espace support, plus la dimension fractale du phénomène observé tend vers zéro. Presque sûrement absent, le phénomène échappe alors généralement à l'observation.

IV. Transition de phase et divergence des moments

Si l'on considère par ailleurs les moments d'ordre q de la distribution de probabilité, définis par :

$$\langle i_\lambda^q \rangle = \int i_\lambda^q dPr(i_\lambda) \quad (8)$$

on peut montrer (Schertzer et Lovejoy, 1993), en supposant que le champ des précipitations est conservatif, qu'il peut exister une valeur critique de q , $q = q_D$, telle que les moments statistiques divergent dès que $q > q_D$.

A q_D correspond une valeur maximale γ_D pour γ , telle que :

$$c(\gamma_D) = q_D \gamma_D - D(q_D - 1)$$

où D est la dimension de l'espace support ; $c(\gamma)$ devient alors linéaire en γ .

$$c(\gamma) = q_D \gamma - D(q_D - 1) \text{ pour } \gamma > \gamma_D \quad (9)$$

En raison d'analogies thermodynamiques, on dit que le processus subit une transition de phase (Schertzer et Lovejoy, 1992), au-delà de laquelle on observe une chute algébrique de la distribution des intensités qui traduit une variabilité extrême.

V. Retour aux courbes intensité–durée–fréquence

A partir de la relation (7), nous pouvons écrire :

$$\log p_\lambda = \log A_\lambda - c(\gamma) \log \lambda \quad (10)$$

où nous supposons que A_λ est constant en première approximation.

Nous nous placerons tout de suite dans le cas où $\gamma > \gamma_D$, qui correspond aux phénomènes extrêmes qui nous intéressent dans cette étude. Nous pourrions alors écrire, d'après les relations (9) et (10) :

$$\log p_\lambda = \log A_\lambda - [q_D \gamma - D(q_D - 1)] \log \lambda$$

soit aussi, en tenant compte que $s_\lambda = \lambda^\gamma$ et que $\gamma = \log s_\lambda / \log \lambda$

$$\log p_\lambda = \log A_\lambda - [q_D (\log s_\lambda / \log \lambda) - D(q_D - 1)] \log \lambda$$

$$\text{soit } \log s_\lambda = \frac{1}{q_D} \log \left(\frac{A_\lambda}{p_\lambda} \right) + D \frac{(q_D - 1)}{q_D} \log \lambda \quad (11)$$

Cette dernière relation lie le seuil s_λ à la probabilité p_λ de le dépasser et à la résolution λ .

Avec les notations habituelles, en tenant compte du fait que la dimension de l'espace support (le temps) est $D = 1$ et compte tenu de (3) et (4), cela donne, après simplification une relation de la forme :

$$\log s = (1/q_D) \log T - \log d + k \quad (12)$$

où k est une quasi-constante : $k = (1/q_D) \log A_\lambda$

VI. Conclusion

L'équation (12), qui ne dépend que du paramètre q_D caractérisant une propriété multifractale de la série pluviométrique, est formellement analogue à l'équation (2). Cela donne donc une base rationnelle à une démarche jusqu'ici empirique. Il faut noter que la relation (12) n'est valable qu'au-delà de la transition de phase, c'est-à-dire pour des valeurs suffisamment grandes des intensités, incluant ce qu'on a coutume d'appeler les pluies extrêmes.

L'équation empirique obtenue par Farthouat (1962) pour la région bordelaise est la suivante :

$$s = 6,82 T^{0,36} d^{-0,77} \text{ soit } \log s = 0,36 \log T - 0,77 \log d + \log 6,82 \quad (13)$$

La valeur de q_D correspondante serait de 2,78, valeur comparable à celle estimée ($3,0 \pm 0,2$) dans l'étude multifractale d'une série chronologique des précipitations à

Nîmes (Ladoy et al, 1993). On observe en revanche une différence entre le coefficient $-0,77$ de $\log d$ (relation 13) et la valeur théorique -1 (relation 12), ce qui devra être expliqué. Il faudra notamment examiner la pertinence de l'hypothèse de conservativité du champ des précipitations (voir à ce propos Tessier et al, 1996), ainsi que le rôle du préfacteur A_λ .

Il faut enfin noter que les courbes Idf peuvent être construites par deux approches (Lahaye et al, 1979) :

– soit en considérant les hauteurs maximales précipitées durant un intervalle de temps de durée donnée d au cours des épisodes pluvieux ;

– soit en étudiant la suite des hauteurs précipitées au cours d'intervalles, de durée d , successifs à partir d'une origine de temps fixe.

Nous avons retenu, pour cette première étude, la deuxième approche, qui se prête bien aux problèmes de changement d'échelle.

Nous nous proposons de poursuivre nos recherches en testant cette approche sur d'autres séries pluviométriques réelles et en comparant les résultats avec ceux des méthodes empiriques, tout en étudiant l'extension de ces résultats aux valeurs « normales » des pluies.

Remerciements : Nous remercions G. de Marsily, R. Létolle, J.P. Carbonnel, P. Ladoy, D. Marsan, Y. Chisirinsky, F. Schmitt, D. Duband, P. Bois pour leur accueil et leurs remarques pertinentes.

RÉFÉRENCES

- Eichert B.S., Knidler J., Shultz G.A. et Sokolov A. 1985. Méthodes de calcul pour les études hydrologiques concernant l'aménagement des eaux, *Etudes et rapports d'hydrologie* 38, UNESCO, Paris, 121 p.
- Farthouat B. 1962. Analyse des précipitations à l'observatoire de Bordeaux Floirac. Relations entre quantité, durée, intensité, période, *La Météorologie*, 4^e Sér., 67, 291-295
- Galea G. et Prudhomme C. 1994. Modèles débit-durée-fréquence et conceptualisation d'un hydrogramme de crue synthétique : validation sur le BVRE de Draix, *Hydrol. Continent.*, 9, 2, 139-151
- Galea G. et Prudhomme C. 1997. Notions de base, concepts et philosophie de la recherche à l'origine des modèles Qdf, *Sci. Eau*, 1, 83-101
- Guerree H. et Gomella C. 1982. *Les eaux usées dans les agglomérations urbaines ou rurales*, vol. I, la collecte, Eyrolles, Paris, 250 p.
- Hubert P. et Carbonnel J.P. 1988. Caractérisation fractale de la variabilité et de l'anisotropie des précipitations tropicales, *CR Acad.Sci. Paris*, série II, 909-914
- Hubert P. et Carbonnel J.P. 1989. Dimensions fractales de l'occurrence de pluie en climat Soudano-Sahélien, *Hydrol. Continent*, 4, 3-10
- Hubert P., Friggitt F. et Carbonnel J.P. 1995. Multifractal structure of Rainfall Occurrence in West Africa, Kundzewicz Z.W. (ed), *New uncertainty concepts in hydrology and water resources*, Cambridge University Press, 109-113
- Ladoy P., Schmitt F., Schertzer D. et Lovejoy S. 1993. Analyse multifractale de la variabilité temporelle des observations pluviométriques à Nîmes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, série II, 775-782
- Lahaye J.P., Meunier M. et Tartes R. 1979. Méthodes d'étude des pluies de courte durée, *La Houille Blanche*, Numéro spécial, 4-5/1979, 237-250
- Lovejoy S. et Schertzer D. 1995. Multifractals and rain, In: Kundzewicz A.W. (ed), *New uncertainty concepts in hydrology and hydrological modeling*, Cambridge Univ. Press, New York, 61
- Mandelbrot B. 1983. *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Fransisco, 460 p.
- Raudkivi A.J. 1979. Hydrology, chap. 3, In: *Precipitation*. Pergamon Press, Toronto
- Remenieras G. 1985. *Hydrologie de l'ingénieur*, Eyrolles, Paris
- Schertzer D. et Lovejoy S. 1987. Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence. Invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs, *Ann. Sci. Math.*, Québec, 11(1), 139-181
- Schertzer D. et Lovejoy S. 1992. Hard and soft multifractal processes, *Phys.* 17, 185, 187-192
- Schertzer D. et Lovejoy S. 1993. Nonlinear variability in geophysics: scaling and multifractal processes. Lecture notes. Institut d'études scientifiques de Cargèse
- Tessier Y., Lovejoy S., Hubert P., Schertzer D. et Pecknold S. 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall on river flows and scaling, causal transfer functions, *J. Geophys. Res.*, 101, p. 26, 427-426, 440