

# MULTIFRACTALS EN TURBULENCE ET GÉOPHYSIQUE

DANIEL SCHERTZER<sup>1</sup> et SHAUN LOVEJOY<sup>2</sup>

1 CERERE, ENPC, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2 et Météo-France, 75007, Paris, France ; 2 Physics dept., McGill U., Montréal, H3A 2T8, PQ, Canada.

**RÉSUMÉ** : Dans le sillage de la Géométrie Fractale introduite par Mandelbrot, le mot ‘multifractal’ est apparu, il y a à peine vingt ans. Mais ce concept est déjà devenu, sous diverses déclinaisons, la clef des développements futurs de la géophysique. Il se forgea au cours de débats relativement théoriques sur l’intermittence en turbulence hydrodynamique, parfois en lien direct avec la dynamique de l’atmosphère. Le traitement de cette dernière requerra une généralisation de la notion d’échelle permettant de conjuguer symétrie d’échelle et fortes anisotropies (ex.: temps/espace, verticale/horizontale). Ceci permit de montrer que les conséquences de l’intermittence pouvaient être du premier ordre et non des « corrections » aux modèles classiques et non intermittents. En fait, ce fut un changement radical de paradigme pour la géophysique : l’extrême variabilité des champs géophysiques sur une grande gamme d’échelle, si souvent constatée et déplorée, devenait maîtrisable. Il est significatif que ce bouleversement ne se limite plus aux problèmes fondamentaux et théoriques de la géophysique, mais atteint maintenant des niveaux très applicatifs, notamment au niveau du management environnemental. Ces applications peuvent être particulièrement stimulantes si elles sont pris dans toute leur complexité.

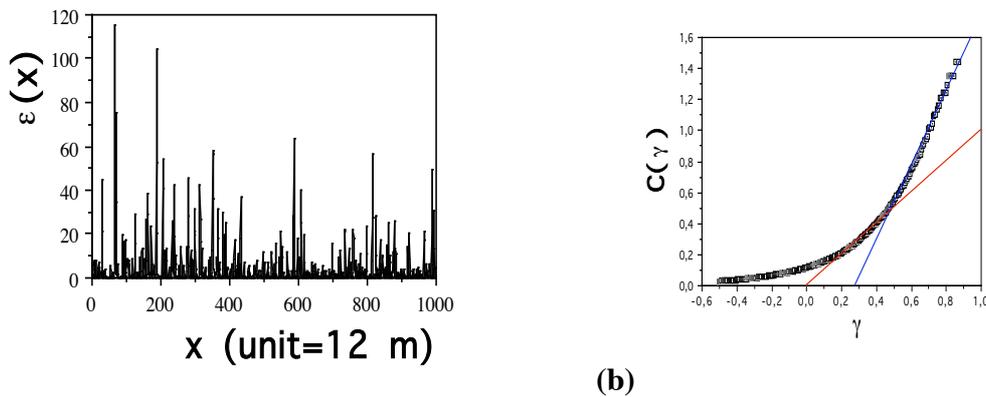
**ABSTRACT** : In the wake of Fractal Geometry introduced by Mandelbrot, the word ‘multifractal’ appeared only twenty years ago. However, this concept already became, under various presentations, the key to future developments in geophysics. It was coined in the course of rather theoretical debates on intermittency in hydrodynamic turbulence, sometimes with direct links to atmospheric dynamics. The latter required a generalized notion of scale in order to deal both with scale symmetries and strong anisotropies (e.g. time vs. space, vertical vs. horizontal). It was thus possible to show that the consequences of intermittency are of first order, not just « corrections » with respect to the classical non-intermittent modeling. In fact, this was a radical paradigm shift for geophysics: the extreme variability of geophysical fields over wide ranges of scale, which had long been so often acknowledged and deplored, suddenly became handy. It is rather significant that this revolution is no longer limited to fundamental and theoretical problems of geophysics, but now touches many applications including environmental management. These applications are particularly stimulating when taken in their full complexity.

## Symétrie d’échelle et dimension

Ce qui est devenue la Géophysique a été depuis longtemps sollicitée pour fournir des objets présentant une autosimilarité sur une grande gamme d’échelle : tourbillons, rivières, séismes et volcans (ex. : *da Vinci*, 1500 ; *Descartes*, 1637 ; *Galileo*, 1638 ; *Lucrece*, -50). Il est sans doute significatif que Perrin (*Perrin*, 1913) ait pris l’exemple des côtes de Bretagne pour illustrer une certaine généralité de la non-

différentiabilité du mouvement brownien. Cet exemple sera ultérieurement repris et considérablement approfondi (Richardson, 1961 ;Mandelbrot, 1967 ;Sapoval, et al., 2004). Parmi les domaines pionniers de la symétrie d'échelle en Géophysique, on peut citer la diffusion atmosphérique (Richardson, 1926.), la sismologie (Gutenberg et Richter, 1944), les débits de rivières (Hurst, 1951), leur forme (Steinhaus, 1954), les milieux poreux (Miller et Miller, 1955a;Miller et Miller, 1955b).

Mais comme pour d'autres symétries (Weyl, 1952;Zee, 1986), ces exemples auraient été vains sans un travail fondamental de conceptualisation pour mettre en évidence l'importance de la symétrie d'échelle et ses éléments profondément unificateurs. Ce fut la contribution originale et irremplaçable de la Géométrie Fractale (Mandelbrot, 1975, 1977, 1983), qui a notamment mis en valeur le rôle crucial de la dimension fractale, invariant associé à la symétrie d'échelle, pour mesurer l'hétérogénéité.



(a)

(b)

Figure 1 (Chigirinskaya, et al., 1994): (a) un échantillon de la « densité »  $\varepsilon(x)$  du flux d'énergie turbulente par rapport à la distance  $x$  parcourue par un avion instrumenté le long de paliers horizontaux. On peut noter la très forte intermittence: l'unité correspond à la moyenne  $\bar{\varepsilon}_1$  de 30 échantillons. (b) Fonction codimension  $c(\gamma)$  estimée à la résolution maximale ( $\Lambda=2^{10}$ ) sur 30 échantillons. On peut noter le point  $(C_1, C_1)$  de tangence à la première bissectrice;  $C_1=0.3\pm 0.05$ , et l'asymptote linéaire ( $\gamma \geq \gamma_D$ ) de pente  $q_D=2.4 \pm 0.05$ .

## D'une dimension à une hiérarchie de codimensions

La dimension de Hausdorff (Hausdorff, 1919) étant définie de façon univoque pour tout ensemble compact, une certaine efficacité et universalité lui était a priori garanties. Ainsi, elle donne accès à une interprétation géométrique simple de l'anormalité d'exposants de lois d'échelle (ex. :Gouyet, 1992), l'étrangeté d'attracteurs non triviaux (ex. :Fraedrich, 1986), la complexité des bassins et rivières (Rodriguez-Iturbe et Rinaldo, 1997), l'intermittence de la turbulence (Mandelbrot, 1974;Frisch, et al., 1978), etc. La dynamique peut être comprise comme étant restreinte à un sous-espace de dimension fractale inférieure à la dimension « de plongement », celle de l'espace physique ou de phase.

Cependant, des symptômes contraires à cet espoir apparaissent. En premier lieu, il fut constaté que des estimateurs de cette dimension donnent des résultats sensiblement distincts, notamment l'algorithme de la dimension de corrélation (Grassberger et Procaccia, 1983) par rapport à celui du comptage de boîtes. Il fut ensuite argumenté que ni les attracteurs (Grassberger, 1983 ;Hentschel et Procaccia, 1983 ;Halsey, et al., 1986), ni les modèles de cascade (Benzi, et al., 1984;Schertzer et Lovejoy, 1984 ;Parisi et Frisch, 1985: Mandelbrot, 1991 #758) ne pouvaient dépendre d'un seul paramètre, contrairement aux processus stochastiques auto-similaires (Lamperti, 1962) tels que

mouvements browniens et vols de Lévy fractionnaires, éléments essentiels de la modélisation de la Géométrie Fractale (ex.: *Peitgen et Saupe*, 1988). L'unicité de la dimension laissa place à une hiérarchie (infinie) de dimensions pour les attracteurs, comme pour les modèles de cascades turbulentes, en dépit du fait que des résultats mathématiques rigoureux (*Peyriere*, 1974) avaient confirmé que l'essentiel de l'énergie se concentrait sur un support de dimension fractale (*Mandelbrot*, 1974). En effet, les fluctuations sont tellement fortes, que la contrainte énergétique n'est plus aussi significative que pour une turbulence dépourvue d'intermittence.

Plus généralement, le rapport entre l'intuition géométrique, si utile pour mettre en évidence les limites des modélisations classiques, et la complexité des champs, notamment géophysiques, peut être questionné. C'est notamment le cas de la « géométrie » de l'espace de phase : si l'état du système à un instant donné peut être toujours représenté par un point de cet espace, ce dernier est fonctionnel pour un champ, et donc, en général, de dimension infinie. En conséquence, il perd un certain nombre de propriétés agréables des espaces de dimension finie : les normes cessent d'être équivalentes, les dilatations ou contractions –si indispensables pour définir des lois d'échelle– ne sont plus compactes, tout comme la boule unité.

Ce questionnement inclut le problème concret de la convergence des modèles numériques de la Géophysique, lorsque leur résolution s'accroît. L'exemple des modèles météorologiques est assez illustratif: les échelles numériquement résolues correspondent typiquement à  $10^6$ - $10^7$  points de grille. En considérant l'atmosphère comme ayant une extension horizontale de  $10^4$  km et une extension verticale de 10 km, il faudrait  $10^{27}$  points de grille pour atteindre l'échelle de dissipation du champ de vent, cette dernière étant de l'ordre du millimètre. Ce nombre, supérieur à celui d'Avogadro, reste bien au-delà des plus puissantes machines, y compris du très ambitieux Earth Simulator développé par National Space Development Agency of Japan (NASDA) et Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI). Il est donc indispensable de représenter les échelles sous-maille par un moyen ou un autre, en espérant qu'il ne biaise pas la convergence.

Ce questionnement n'est pas resté sans réponse. En effet, l'analyse de cascades multiplicatives stochastiques, dont les espaces de phase et de probabilité sont de dimension infinie, a mis en évidence la loi d'échelle de la «densité»  $\varepsilon$ , par rapport à la mesure volume (de Lebesgue), d'une mesure stochastique singulière  $\Pi$  par rapport à celle-ci. Ce problème a été initialement abordé pour caractériser l'intermittence de la turbulence hydrodynamique : l'activité de la turbulence se concentre de plus en plus lorsqu'on l'analyse à des échelles de plus en plus fines (*Batchelor et Townsend*, 1949; *Batchelor*, 1953). Il y a des poches d'activité à l'intérieur de poches d'activité, etc...  $\Pi$  est alors le flux d'énergie vers les petites échelles. Depuis (*Yaglom*, 1966), ce flux a été modélisé à l'aide de modèles multiplicatifs de cascade de plus en plus sophistiqués. La généralité de ces modèles font que cette problématique a été rapidement étendue à de très nombreux champs géophysique, notamment pluie et nuages (*Schertzer et Lovejoy*, 1987; *Fraedrich et Larnder*, 1993; *Tessier, et al.*, 1993; *Lovejoy et Schertzer*, 1995; *Olsson et Niemczynowicz*, 1996), débits de rivières (*Tessier, et al.*, 1996; *Pandey, et al.*, 1998; *Labat, et al.*, 2002), dispersion de polluants (*Salvadori, et al.*, 1994; *Chigirinskaya, et al.*, 1998; *Finn, et al.*, 2001), rayonnement (*Lovejoy, et al.*, 1990; *Naud, et al.*, 1996; *Davis, et al.*, 1997), topographie (*Lavallée, et al.*, 1993; *Lovejoy*, 1995; *Gagnon, et al.*, 2003), télédétection (*Gabriel, et al.*, 1988; *Lévy-Vehel*, 1995; *Arneodo, et al.*, 1999; *Lovejoy, et al.*, 2001c; *Harvey, et al.*, 2002), le plancton (*Seuront, et al.*, 1999; *Lovejoy, et al.*, 2001d).

## Multifractals stochastiques et déterministes

La loi d'échelle est alors définie par la mesure (probabiliste) de la fraction de l'espace de probabilité où la densité  $\varepsilon_\lambda$  de ce flux à la résolution  $\lambda$  ( $= L/\ell$ ,  $L$  étant l'échelle (spatio-temporelle) externe du phénomène,  $\ell$  celle d'observation) dépasse le seuil  $\lambda^\gamma \bar{\varepsilon}_1$  ( $\bar{\varepsilon}_1$  étant la moyenne de ce flux à l'échelle externe) :

$$\Pr(\varepsilon_\lambda > \lambda^\gamma \bar{\varepsilon}_1) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (1)$$

L'exposant  $\gamma$  mesure la divergence algébrique du champ ( $\varepsilon_\lambda \rightarrow \infty$ ;  $\gamma > 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ) à des résolutions de plus en plus grandes, et définit donc un ordre de singularité, brièvement dénommé 'singularité'. La fonction  $c(\gamma)$  est une codimension statistique (*Schertzer et Lovejoy*, 1987; *Schertzer, et al.*, 2002), correspond à une fonction de Cramer (*Oono*, 1989; *Mandelbrot*, 1991) et est non-négative, non-décroissante et convexe. La Figure 1 donne un exemple de l'intermittence de la dynamique atmosphérique et sa fonction de codimension  $c(\gamma)$ .

La transformation de Mellin montre (*Schertzer, et al.*, 2002) que les moments statistique d'ordre  $q$  suivent aussi une loi d'échelle ( $\langle . \rangle$  désigne l'espérance mathématique) :

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (2)$$

En considérant la limite  $\lambda \rightarrow \infty$ , les exposants  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  se correspondent dans une transformation de Legendre comme dans le cadre des multifractals géométriques et déterministes (*Parisi et Frisch*, 1985). La restriction au cadre déterministe (ex. : *Schertzer et Lovejoy*, 1992) nécessite  $c(\gamma) \leq d$  (où  $d$  est la dimension de plongement) et conduit aux relations suivantes avec le formalisme déterministe (*Halsey, et al.*, 1986) :

$$\alpha_d = d - \gamma; f_d(\alpha_d) = d - c(\gamma); \tau_d(q) = d(q-1) - K(q) \quad (3)$$

La singularité  $\gamma$  est alors presque sûrement portée par un ensemble fractal de dimension  $f_d(\alpha_d) = d - c(\gamma)$ , donc  $c(\gamma)$  est presque sûrement une codimension géométrique. Le terme multifractal, introduit par (*Parisi et Frisch*, 1985), correspond au fait qu'un champ multifractal peut être compris comme une hiérarchie infinie d'ensembles fractals -de dimension  $f_d(\alpha_d)$ , plus généralement de codimension  $c(\gamma)$ - sur lesquels  $\varepsilon_\lambda$  diverge plus vite que  $\lambda^\gamma$ . Il est important de noter la dépendance par rapport à la dimension de plongement  $d$  des notations déterministes.

La dépendance de la codimension  $c(\gamma)$  par rapport à la singularité  $\gamma$  équivaut à la non-linéarité en  $q$  de la fonction d'échelle des moments  $K(q)$ . Par exemple, les multifractals « fortement universels » (*Schertzer et Lovejoy*, 1997) ont une nonlinéarité en général nonanalytique ( $0 < \alpha < 2$ ) :

$$K(q) = C_1(q^\alpha - q)/(\alpha - 1) \quad (4)$$

La codimension  $C_1$  du champ moyen ( $q=1$ ) correspond au point fixe  $C_1 = c(C_1)$  et mesure la fractalité moyenne :  $C_1 = 0$  pour un champ homogène. Le paramètre  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) mesure la multifractalité du processus.  $\alpha^1$  est aussi le paramètre de stabilité de Lévy du générateur de ce processus (*Schertzer et Lovejoy*, 1987)

---

<sup>1</sup> Ce paramètre  $\alpha$  n'a rien de commun avec la singularité  $\alpha_d$  discutée précédemment.

Ts	1 MONTH		1 DAY		1 HOUR		1 MINUTE		1 SECOND		
Ls											
10000 Km	STANDING WAVES	ULTRA LONG WAVES	TIDAL WAVES								MACRO $\alpha$ SCALE
2000 Km		BAROCLINIC WAVES									MACRO $\beta$ SCALE
200 Km			FRONTS & HURRICANES								MESO $\alpha$ SCALE
20 Km				NOCTURNAL LOW LEVEL JET SQUALL LINES INERTIAL WAVES CLOUD CLUSTERS MTN & LAKE DISTURBANCE							MESO $\beta$ SCALE
2 Km					THUNDERSTORMS CAT URBAN EFFECTS						MESO $\gamma$ SCALE
200 m						TORNADOES DEEP CONVECTION SHORT GRAVITY WAVES					MICRO $\alpha$ SCALE
20 m							DUST DEVILS THERMALS WAKES				MICRO $\beta$ SCALE
								PLUMES ROUGHNESS TURBULENCE			MICRO $\gamma$ SCALE
C.A.S.	CLIMATOLOGICAL SCALE		SYNOPTIC PLANETARY SCALE		MESO-SCALE		MICRO-SCALE				PROPOSED DEFINITION

Figure 2 : Schéma typique de la phénoménologie météorologique (adapté de *Orlanski, 1975; Atkinson, 1981*), la diagonale (bleue) ajoutée (*Schertzer, et al., 1997*) correspond à la relation 3D temps de vie/taille des structures (Eq. 5), la courbe verticale (rouge) correspondrait à la phénoménologie 2D grandes échelle.

Pour  $\alpha=0$ , on obtient le  $\beta$ -modèle (Mandelbrot, 1974; Frisch, et al., 1978) qui est uni/mono-fractal :  $K(q)$  est linéaire, il y a une unique singularité bornée  $\gamma^+ = C_1$  (structures actives) et une non-bornée  $\gamma^- = -\infty$  (structures inactives). Ce modèle est instable et non générique (Schertzer et Lovejoy, 1984): dès que l'on considère des structures très faiblement actives (mais non complètement inactives :  $-\infty < \gamma^- \ll -1$ ), celles-ci en interagissant avec des structures actives ( $\gamma^+$ ) génèrent tout un spectre de niveaux d'activité intermédiaires ( $\gamma^- < \gamma < \gamma^+$ ), donc un comportement multifractal.  $\alpha=2$  définit le processus incorrectement appelé 'lognormal' (Kolmogorov, 1962 ; Obukhov, 1962; Yaglom, 1966).

Il est important de noter que les simulations stochastiques des champs multifractals (Wilson, et al., 1991; Pecknold, et al., 1993) peuvent être conditionnées par les mesures effectuées (Chigirinskaya, et al., 1998).

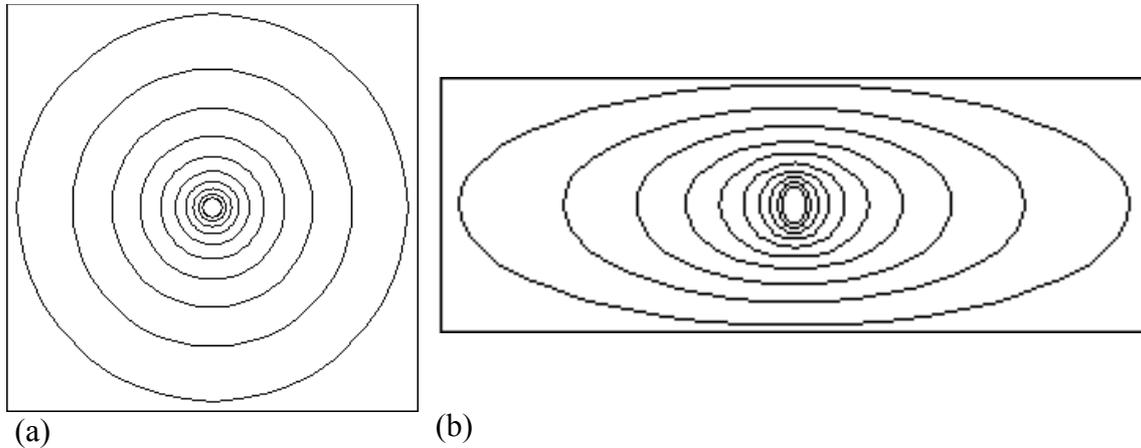


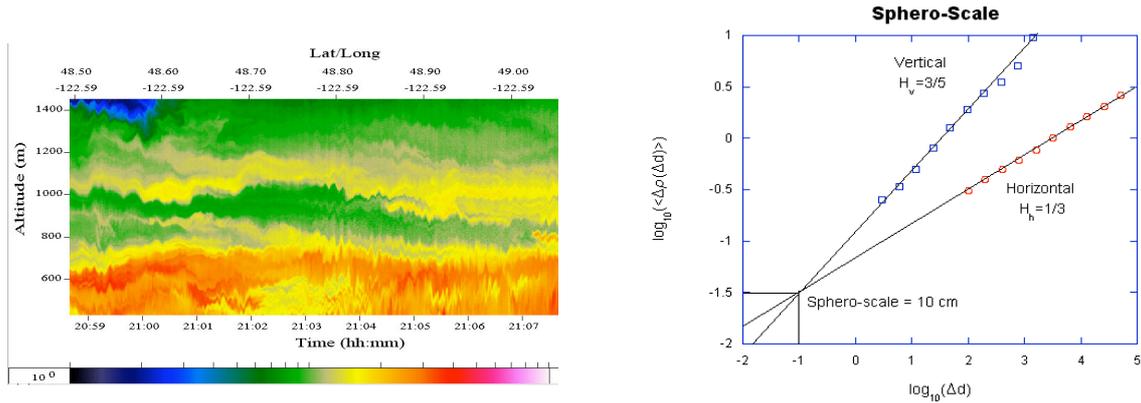
Figure 3: Contours moyens des tourbillons dans une cascade statistiquement (a) isotrope (donc auto-similaire) et (b) anisotrope (de façon auto-affine). Le générateur du changement d'échelle est respectivement  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_z \end{bmatrix}$ ;  $H_z = 5/9$  (Schertzer et Lovejoy, 1991)

## Distance euclidienne et échelle généralisée

Curieusement, la Géométrie Fractale a longtemps préservé la distance euclidienne pour définir la topologie de l'espace physique, en particulier dans la définition de la dimension de Hausdorff. Cela avait la conséquence rassurante que la dimension de Hausdorff de l'espace physique était simplement sa dimension topologique, donc entière. Pourtant il y a au moins trois raisons (Schertzer et Lovejoy, 1984 ; Mandelbrot, 1985; Schertzer et Lovejoy, 1985a, b, 1986) de mettre en cause la pertinence de cette distance pour la plupart des processus.

La première est que pour les lois d'échelle espace-temps, il n'y a aucune raison d'avoir une isotropie entre les composantes incommensurables espace et temps. Ainsi le mouvement brownien a pour exposant d'échelle 1 pour le temps, 1/2 pour l'espace. La phénoménologie de la turbulence, essentiellement basée sur des considérations dimensionnelles, conduit à la correspondance suivante entre taille  $\ell$  et temps  $\tau(\ell)$  de vie des structures (ex. : Robinson, 1971) :

$$\tau(\ell) \propto \ell^{2/3} \quad (5)$$



(a) (b)  
 Figure 4 (Lilley, et al., 2004): (a) section verticale de la structure de la rétrodiffusion des aérosols atmosphériques mesurée par un lidar embarqué, (b) loi d'échelle anisotrope correspondante. On peut noter le très bon accord entre les points expérimentaux (cercles ouverts pour l'horizontale (rouges) et la verticale (bleus)) avec les droites théoriques correspondant aux exposants théoriques  $H_h=1/3$  ('horizontale) et  $H_v=3/5$  (verticale). Le point d'intersection de celles-ci correspond à une sphéro-échelle de 10 cm, échelle autour de laquelle le processus est approximativement isotrope.

donc un exposant d'échelle 1 pour l'espace,  $2/3$  pour l'espace, contrairement à « l'hypothèse de turbulence gelée » (Taylor, 1938). Le fait que cette anisotropie d'échelle est observée depuis les plus petites échelles jusqu'aux échelles planétaires (ex. : Fig. 2) a d'énormes conséquences météorologiques, dont certaines sont discutées plus loin.

La seconde raison correspond au fait que la composante espace des processus géophysiques ne peut être en général isotrope. En effet, la gravité intervient à toute échelle et donc induit, par exemple par les forces de flottabilité, une anisotropie à toute échelle qui met en cause toute approximation isotrope ! Ceci est en accord avec la forte stratification de l'atmosphère à grande échelle et les phénomènes de convection à plus petite échelle, mais va à l'encontre de la démarche initiée par Kolmogorov (Kolmogorov, 1941): postuler d'abord une isotropie (éventuellement locale, c.a.d. à petite échelle), puis l'existence de lois d'échelle. Il faut procéder de façon inverse: postuler d'abord l'existence de lois d'échelles, respectant des symétries moins triviales que les classiques rotations, et dans ce cadre rechercher les notions pertinentes d'échelles. Celles-ci sont définies par la dynamique du phénomène considéré, et non plus par la géométrie euclidienne.

Enfin, et ce n'est pas le moindre argument, il n'a aucune raison mathématique de définir les dimensions de Hausdorff, et plus généralement la topologie de l'espace, à partir de la distance euclidienne : une notion (généralisée) d'échelle pour des boules définies par une contraction (non nécessairement isotrope) suffit. La physique des phénomènes la rend nécessaire. C'est particulièrement indispensable pour aborder des surfaces, qui ne sont pas infiniment minces, donc définir de façon précise la dimension d'espaces physiques quasi-bidimensionnels ou quasi-tridimensionnels.

Cette notion généralisée d'échelle  $\lambda$  vérifie une propriété de contraction anisotrope::

$$\|T_\lambda r\| = \lambda^{-1} \|r\| \quad (6)$$

pour la contraction anisotrope  $T_\lambda$  de rapport d'échelle  $\lambda$ , qui, dans le cas linéaire, admet pour générateur une matrice  $G$  :

$$T_\lambda = \lambda^{-G} \equiv \exp(-\text{Log}(\lambda)G); \quad (7)$$

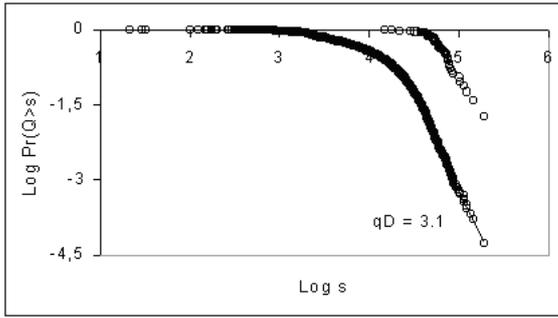


Figure 5a: Représentation (Log-log) de la probabilité au dépassement d'un seuil pour les données normalisées du fleuve Blavet (série de 50 ans) : debits journaliers (à gauche,  $q_D \approx 3.1$ ) et maximums annuels correspondant (à droite,  $q_D \approx 2.7$ ). (Tchiguirinskaia, et al., 2004b)]

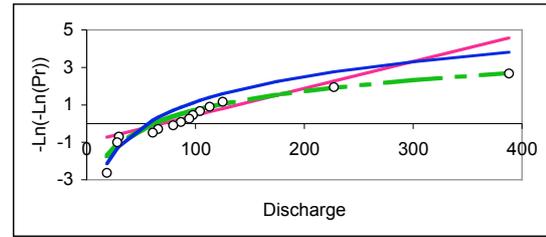


Figure 5b: Lois de répartition des maxima annuels (cercles ouverts) des débits journaliers du Gardon (série de 15 ans) en « coordonnées Gumbel » ( $\text{Log}_2$ -linéaire). La droite (rose, continue) correspond à l'ajustement de la loi de Gumbel. Les ajustements de Fréchet sont meilleurs, en particulier celui obtenu à l'aide de l'exposant  $q_D$  (courbe tiretée, verte), plutôt qu'à l'aide de moments (courbe continue, bleue)

$G$  étant nécessairement la matrice identité pour la métrique Euclidienne ( $T_\lambda \underline{x} = \underline{x}/\lambda$ ). Dans tous les cas la dimension de Hausdorff de l'espace pavé par des boules  $B_\lambda$  déduite par contraction  $T_\lambda$  d'une boule unité  $B_1$  ( $B_\lambda = T_\lambda(B_1)$ ) est donnée par :

$$D_{el} \equiv \text{Trace}(G) \quad (8)$$

Cette dimension « elliptique » de l'espace physique à d'abord été considérée dans le cas auto-affine :  $G$  et  $T_\lambda$  toutes deux matrices diagonales, les boules  $B_\lambda$  sont alors plutôt elliptiques que sphériques (Fig. 3). Ce cas a été suscité par la crise du « modèle standard » de dynamique atmosphérique. Ce modèle était fondé sur la dichotomie grande échelles quasi-bidimensionnelles, petites échelles quasi-tridimensionnelles (Monin, 1972; Pedlosky, 1979). Au niveau théorique, le caractère quasi-2D de la turbulence quasi-géostrophique (Charney, 1971) semblait correspondre à un certain bon sens: l'atmosphère à grande échelle (par ex. observée à partir d'un satellite) paraît un mince film ( $h \sim 10$  km d'épaisseur) par rapport à une large extension horizontale ( $L \sim 20$  000 km). Les développements asymptotiques du premier ordre par rapport à un petit paramètre (le nombre de Rossby pour le quasi-géostrophique) semblaient validés du fait du très faible rapport d'aspect  $a = h/L \approx 5 \cdot 10^{-4}$ .

Mais la dynamique 2D d'advection (conservative) de la vorticité (aux grandes échelles) est instable par rapport à des perturbations 3D, qui spontanément génèrent de la vorticité. Aussi, pour co-exister, les régimes 2D et 3D doivent être séparés par un *trou* (énergétique) de "mésos-échelle" ("mesoscale gap"). Celui-ci a d'abord reçu des confirmations expérimentales (Van der Hoven, 1957; Morel et Larcheveque, 1974). Depuis un foisonnement de résultats expérimentaux a confirmé au contraire l'existence d'une loi d'échelle anisotrope de quelques mètres jusqu'aux échelles planétaires en accord avec les exposants théoriques de la conservation du flux d'énergie ( $H_h = 1/3$ ) le long de l'horizontale (Gage, 1979; Lilly et Paterson, 1983; Chigirinskaya, et al., 1994; Lindborg, 1999; Lovejoy, et al., 2001b) et du flux des forces de flottabilité ( $H_v = 3/5$ ) le long de la verticale (Endlich, et al., 1969; Adelfang, 1971; Schertzer et Lovejoy, 1985a; Lazarev, et al., 1994; Lovejoy, et al., 2004). Ces exposants théoriques conduisent à une dimension  $D_{el} = 2 + H_z = 23/9 = 2.555...$  ( $H_z = H_h/H_v$ ) Une récente étude de la rétro-diffusivité lidar des aérosols atmosphériques (Lilley, et al., 2004) vient d'apporter une confirmation plus directe de cette loi d'échelle anisotrope (Fig. 4).

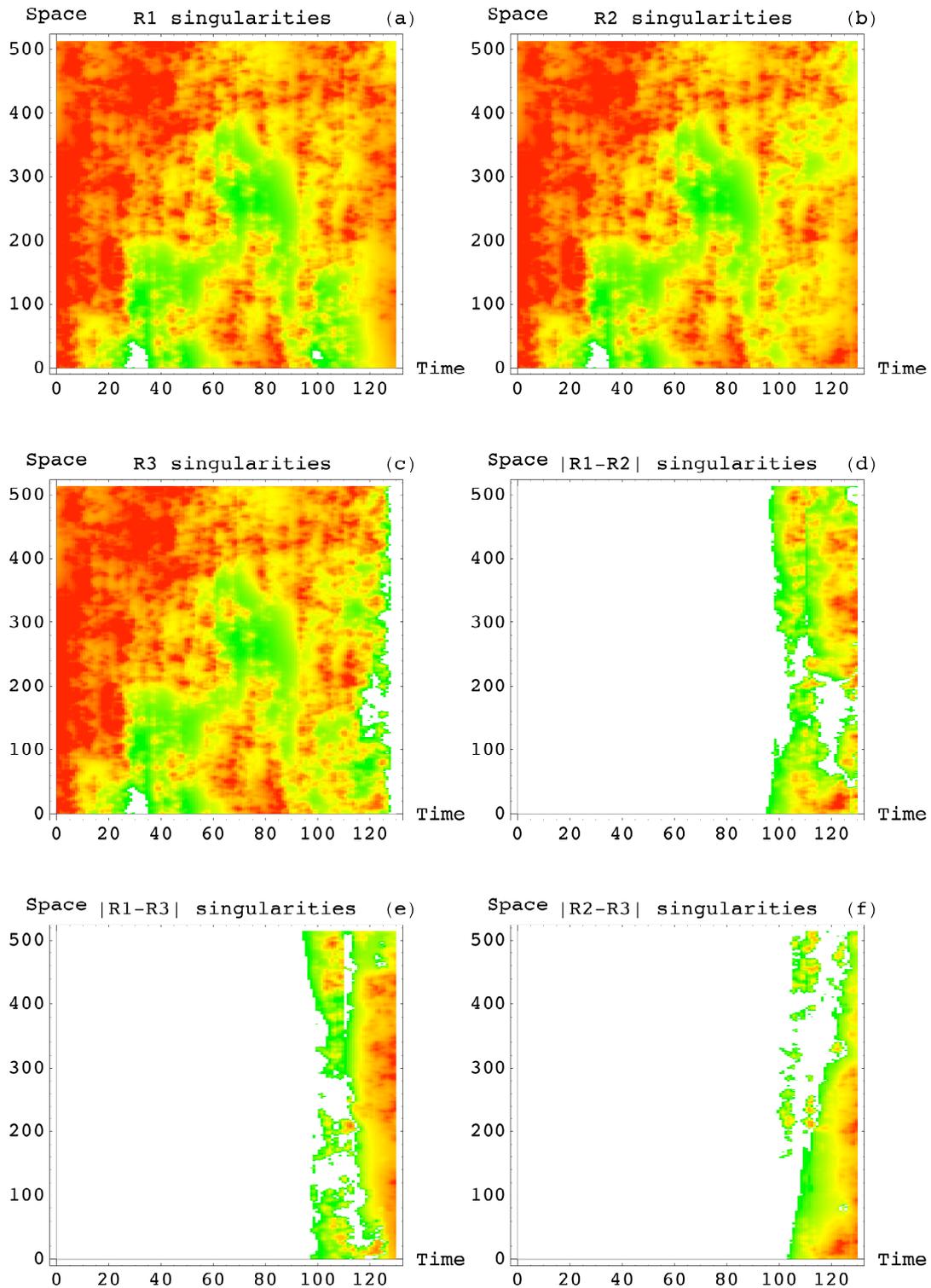


Figure 6 a-f : Simulation multifractale de la perte de prédictibilité pour un champ de pluie (Schertzer et Lovejoy, 2004b). (a)  $R_{\Lambda}^1(x,t)$  et (b)  $R_{\Lambda}^2(x,t)$  sont identiques jusqu'à  $t_0=64$  où leur flux deviennent indépendants. (c)  $R_{\Lambda}^3(x,t)_3$  est la prévision basée sur leur passé commun et la conservation déterministe du flux. Les singularités des champs et de leurs différences absolues (d-f) sont présentées avec la palette suivante: blanc pour les singularités négatives ; vert à jaune pour les singularités jusqu'à la moyenne, rouge pour celles contribuant à des moments d'ordre supérieur à 2.

Soulignons que ce problème de stratification/convection est très général en géophysique et ainsi des résultats similaires ont été obtenus pour la susceptibilité géophysique (*Lovejoy, et al., 2001a*) et la conductivité hydraulique (*Tchiguirinskaia, 2002*) de la croûte terrestre.

## Multifractals et management environnemental

Le bouleversement induit par les analyses et simulations multifractales de la variabilité multiéchelle des champs géophysiques commence à interroger nos pratiques et nos techniques actuelles de gestion de l'environnement. En effet, celles-ci ont souvent été développées en relation avec des compréhensions et modélisations des processus physiques ne prenant pas en compte la variabilité multiéchelle des champs environnementaux. De ce fait, il y a pour le moins nécessité de les revisiter profondément. Il en est ainsi des techniques d'estimation du risque qui sont utilisées pour la gestion des ressources (eau, énergie éolienne), la définition et la gestion de grands ouvrages (barrages, réseaux terrestres). En effet, les multifractals ont mis en évidence que, sous des conditions assez générales (par ex. : *Schertzer et Lovejoy, 1992*), apparaît une « transition multifractale de premier ordre » :  $c(\gamma)$  admet une asymptote linéaire pour les grandes singularités (ex. : Fig. 1b). Par dualité de Legendre, la pente  $q_D$  de cette asymptote est l'exposant de la loi de puissance de la distribution des extrêmes (qui est donc de type Pareto (*Pareto, 1897*)) et l'ordre critique à partir duquel les moments statistiques divergent :

$$\text{tout } q > q_D : \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \infty \Leftrightarrow \Pr [\varepsilon_\lambda > x] \approx x^{-q_D}, \quad x \gg 1 \quad (9)$$

Du fait qu'une loi de puissance a une décroissance beaucoup plus lente que les lois exponentielles habituellement utilisées pour estimer l'intensité des événements correspondant à une période de retour donnée (ex. : crue décennale, centennale), ces événements peuvent être largement sous-estimés.

La Figure 5a montre l'exemple d'une loi de puissance pour la probabilité des extrêmes des débits journaliers du fleuve Blavet et de leurs maxima annuels (*Tchiguirinskaia, et al., 2004b*). La figure 5b met l'accent sur le fait que la queue de distribution de probabilité des débits journaliers suit une loi de puissance avec un paramètre multifractal  $q_D \approx 3$ , et que la distribution des maxima annuels correspond à une loi de Fréchet (*Fréchet, 1927*) d'exposant  $\alpha_F \approx q_D$ , et non une loi de Gumbel (*Gumbel, 1958*), qui elle décroît plus vite qu'une exponentielle.

Les techniques multifractales ont aussi permis de revisiter les limites de prédictibilité des processus nonlinéaires. Contrairement à « l'effet papillon » (*Lorenz, 1963*), le paradigme dominant depuis la « révolution du chaos », l'analyse multifractale des systèmes complexes en espace comme en temps (*Schertzer et Lovejoy, 2004b*) met en valeur qu'il n'y pas de temps caractéristique de perte de prédictibilité : celle-ci suit des lois de puissance, et non exponentielles. Cela correspond à une montée relativement lente en échelles spatiales des erreurs sur les conditions initiales ou sur les conditions aux limites. Le rôle de l'intermittence est de premier ordre : la perte d'information se produit par bouffées, et non de façon homogène (en temps et en espace) contrairement aux résultats obtenus à l'aide de techniques de « fermetures analytiques » de la turbulence (*Lorenz, 1969; Leith, 1971; Leith et Kraichnan, 1972; Métais et Lesieur, 1986*). Ceci induit un comportement multifractal de la prédictibilité qui peut être théoriquement et empiriquement déterminé par celui du champ concerné (*Schertzer et Lovejoy, 2004a*). Ces résultats confirment et expliquent (Fig. 6) la nécessité de précéder

à des paramétrisations sous-maille stochastiques plutôt que déterministes, comme cela a été empiriquement constaté (Buizza, *et al.*, 1999), et surtout encouragent à développer des méthodes de prévision multifractale (Marsan, *et al.*, 1996; Seed, 2002).

Enfin, il est significatif que, douze ans après la tenue du premier colloque Kovacs de l'Association Internationale des Sciences Hydrologiques (AISH/IASH) et du Programme International d'Hydrologie (PHI/IHP) de l'UNESCO consacré à la variabilité multiéchelle des processus hydrologiques (Feddes, 1995), le septième colloque Kovacs vient d'élargir ce thème à la gestion de l'eau (Tchiguirinskaia, *et al.*, 2004a). Ce colloque a souligné l'importance cruciale de la multiplicité d'échelles tant dans les phénomènes physiques que sociaux-économiques et leurs interactions mutuelles. Ceci concerne à la fois les prises de décisions concernant la gestion du cycle de l'eau et la réponse de l'environnement à celle-ci, la nécessité d'avoir des banques de données et des modèles en accord avec la hiérarchie des échelles spatio-temporelles en jeu.

En fait, se pose au niveau de la gestion de notre environnement le même changement de paradigme que pour les sciences hydrologiques : abandonner le vain espoir de comprendre (et gérer) le cycle de l'eau sur quelques échelles, pour le comprendre (et le gérer) à travers une grande gamme d'échelles spatio-temporelles.

#### RÉFÉRENCES :

- ADELFRANG, S.I., « On the relation between wind shears over various intervals », *Journal of Atmospheric Sciences*, 10, n° pp. 138, 1971.
- ARNEODO, A., DESCOTER, N. et ROUX, S.G., « Intermittency, Log-Normal Statistics, and Multifractal Cascade Process in High-Resolution Satellite Images of Cloud Structure », *Phys. Rev Letters*, 83, n° 6, pp. 1255-1258, 1999.
- ATKINSON, B.W., *Mesoscale Atmospheric Circulations*, Academic Press, (London), 1981.
- BATCHELOR, G.K., *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, (Cambridge), 1953.
- BATCHELOR, G.K. et TOWNSEND, A.A., « The Nature of turbulent motion at large wavenumbers », *Proceedings of the Royal Society of London, A* 199, n° pp. 238, 1949.
- BENZI, R., PALADIN, G., PARISI, G. et VULPIANI, A., « On the multifractal nature of fully developed turbulence », *Journal of Physics A*, 17, n° pp. 3521-3531, 1984.
- BUIZZA, R., MILLER, M.J. et PALMER, T.N., « Stochastic Simulation of Model Uncertainties in the ECWMF Ensemble Prediction System », *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society.*, 125, n° pp. 28887-22908, 1999.
- CHARNEY, J.G., « », *J. Atmos. Sci.*, 28, n° pp. 1087, 1971.
- CHIGIRINSKAYA, Y., SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., LAZAREV, A. et ORDANOVICH, A., « Unified multifractal atmospheric dynamics tested in the tropics, part I: horizontal scaling and self organized criticality », *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1, n° 2/3, pp. 105-114, 1994.
- CHIGIRINSKAYA, Y., SCHERTZER, D., SALVADORI, G., RATTI, S. et LOVEJOY, S., « Chernobyl 137Cs Cumulative Soil Deposition in Europe: is it Multifractal? », in *Chaos Fractals Models*, edited by F. M. Guindani et G. Salvadori, pp. 63-70, Italian University Press, (Pavia), 1998.
- DA VINCI, L., « Carnets de Léonard de Vinci », édité par Bibliothèque de l'Institut de France, Paris, 1500.

- DAVIS, A., MARSHAK, A., WISCOMBE, W.J. et CAHALAN, R.F., « The LANDSAT scale-break in stratocumulus as a three-dimensional radiative transfer effect, implications for cloud remote sensing », *Journal of Atmospheric Sciences*, 54, n° pp. 241-260, 1997.
- DESCARTES, R., *Le Discours de la Methode*, (Leiden), 1637.
- ENDLICH, R.M., SINGLETON, R.C. et KAUFMAN, J.W., « Spectral Analyses of detailed vertical wind profiles », *Journal of Atmospheric Sciences*, 26, n° pp. 1030-1041, 1969.
- FEDDES, R.A., « Space/Time Scale Variability and Interdependence of Hydrological Processes », in *International Hydrology Series*, édité par University Press, Cambridge U.K., 1995.
- FINN, D., LAMB, B., LECLERC, M.Y., LOVEJOY, S., PECKNOLD, S. et SCHERTZER, D., « Multifractal Analysis of Plume concentration fluctuations in surface layer flows », *Journal of Applied Meteorology*, 40, n° 2, pp.,229-245, 2001.
- FRAEDRICH, K., « Estimating the dimensions of weather and climate attractors », *Journal of Atmospheric Sciences*, 43, n° pp. 419, 1986.
- FRAEDRICH, K. et LARNDER, C., « Scaling regimes of composite rainfall time series », *Tellus*, 45 A, n° pp. 289-298, 1993.
- FRECHET, M., « Sur la loi de probabilité de l'ecart maximum », *Ann. Soc. Math. Polon.*, 6, n° 93-116, pp. 1927.
- FRISCH, U., SULEM, P.L. et NELKIN, M., « A simple dynamical model of intermittency in fully develop turbulence », *Journal of Fluid Mechanics*, 87, n° pp. 719-724, 1978.
- GABRIEL, P., LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. et AUSTIN, G.L., « Multifractal Analysis of resolution dependence in satellite imagery », *Geophys. Res. Lett.*, 15, n° pp. 1373-1376, 1988.
- GAGE, K.S., « Evidence for  $k^{-5/3}$  law inertial range in meso-scale two dimensional turbulence », *Journal of Atmospheric Sciences*, 36, n° pp. 1979, 1979.
- GAGNON, J.S., LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « Multifractal surfaces and topography », *Europhys. Lett.*, 62, n° pp. 801-807, 2003.
- GALILEO, *Mathematical Discourses and demonstrations touching two new Sciences*, (Leyden), 1638.
- GOUYET, J.F., *Physique et structures fractales*, Masson, (Paris), 1992.
- GRASSBERGER, P., « Generalized dimensions of strange attractors », *Physical Review Letter*, A 97, n° pp. 227, 1983.
- GRASSBERGER, P. et PROCACCIA, I., « Measuring the strangeness of Strange atractors », *Physica*, 9D, n° pp. 189-208., 1983.
- GUMBEL, E.J., *Statistics of the Extremes*, Colombia Univ. Press, (New-York), 1958.
- GUTENBERG, B. et RICHTER, C.F., « Frequency of Earthquakes in California », *Bull. Seis. Am.*, 34, n° pp. 185, 1944.
- HALSEY, T.C., JENSEN, M.H., KADANOFF, L.P., PROCACCIA, I. et SHRAIMAN, B., « Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets », *Physical Review A*, 33, n° pp. 1141-1151, 1986.
- HARVEY, D.A., GAONAC'H, H., LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « Multifractal characterization of remotely sensed volcanic features: a case study from Kiluaea volcano, Hawaii », *Fractals*, 10, n° 3, pp. 265-274, 2002.
- HAUSDORFF, « Dimension und äusseres Mass », *Math. Ann.*, 79, n° pp. 1919.
- HENTSCHEL, H.G.E. et PROCACCIA, I., « The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors », *Physica D*, 8, n° pp. 435-444, 1983.

- HURST, H.E., « Long-term storage capacity of reservoirs », Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116, n° pp. 770-808, 1951.
- KOLMOGOROV, A.N., « Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers », Proc. Acad. Sci. URSS., Geochem. Sect., 30, n° pp. 299-303, 1941.
- KOLMOGOROV, A.N., « A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number », Journal of Fluid Mechanics, 13, n° 1, pp. 82-85, 1962.
- LABAT, D., MANGIN, A. et ABABOU, R., « Rainfall-runoff relations for karstic springs: multifractal analyses », J. Hydrology, 256, n° pp. 176-195, 2002.
- LAMPERTI, J., « Semi-stable stochastic processes », Transactions of the American Mathematical Society, 104, n° pp. 62-78, 1962.
- LAVALLEE, D., LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. et LADOUY, P., « Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation », in *Fractals in geography*, edited by L. De Cola et N. Lam, pp. 171-205, Prentice-Hall, 1993.
- LAZAREV, A., SCHERTZER, D., LOVEJOY, S. et CHIGIRINSKAYA, Y., « Unified multifractal atmospheric dynamics tested in the tropics: part II, vertical scaling and Generalized Scale Invariance », Nonlinear Processes in Geophysics, 1, n° pp. 115-123, 1994.
- LEITH, C.E., « Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence », Journal of Atmospheric Sciences, 28, n° pp. 145-161, 1971.
- LEITH, C.E. et KRAICHNAN, R.H., « Predictability of turbulent flows », J. Atmos. Sci, 29, n° pp. 1041-1058, 1972.
- LEVY-VEHEL, J., « Multifractal analysis of remotely sensed images », in *Fractals in Geoscience and remote sensing*, edited by G. G. Wilkinson, I. Kanellopoulos et J. Mègier, pp. 88, Official publications of the European Communities, (Luxembourg), 1995.
- LILLEY, M., STRAWBRIDGE, K., LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « 23/9 dimensional anisotropic scaling of passive admixtures using lidar data of aerosols », Phys Rev. E, (in press), n° pp. 2004.
- LILLY, D. et PATERSON, E.L., « Aircraft measurements of atmospheric kinetic energy spectra », Tellus, 35A, n° pp. 379-382, 1983.
- LINDBORG, E., « Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence? », Journal of Fluid Mechanics, 388, n° 259-288, pp. 1999.
- LORENZ, E.N., « Deterministic nonperiodic flow », Journal of Atmospheric Sciences, 20, n° pp. 130-141, 1963.
- LORENZ, E.N., « The predictability of a flow which possesses many scales of motion », Tellus, 21, n° pp. 289-307, 1969.
- LOVEJOY, S., D. LAVALLEE, D. SCHERTZER, « Multifractal topography and the  $l^{1/2}$  law, », Nonlinear Processes in Geophysics, 2, n° pp. 17-22, 1995.
- LOVEJOY, S., GABRIEL, P., DAVIS, A., SCHERTZER, D. et AUSTIN, G.L., « Discrete Angle Radiative Transfer. Part I: scaling and similarity, universality and diffusion », Journal of Geophysical Research, 95, n° pp. 11699-11715, 1990.
- LOVEJOY, S., PECKNOLD, S. et SCHERTZER, D., « Stratified multifractal magnetization and surface geomagnetic fields - I Spectral analysis and modelling », Geophys. Inter. J., 144, n° pp. 1-22, 2001a.
- LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « Multifractals and Rain », in *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*, edited by Z. W. Kunzewicz, pp. 62-103, Cambridge University Press, 1995.

- LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. et STANWAY, J.D., « Direct Evidence of Multifractal Atmospheric Cascades from Planetary Scales down to 1 km. », *Phys. Rev. Letter*, 86, n° 22, pp. 5200-5203, 2001b.
- LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., TESSIER, Y. et GAONACH, H., « Multifractals and Resolution independent remote sensing algorithms: the example of ocean colour », *Inter. J. Remote Sensing*, 22, n° 7, pp. 1191-1234, 2001c.
- LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. et TUCK, A.F., « Fractal Aircraft Trajectories and anomalous turbulent statistics », *PRE*, n° pp. (in press), 2004.
- LOVEJOY, S., TESSIER, Y., CLAEREDEBOUDT, M., CURRIE, W.J.C., ROFF, J., BOURGET, E. et SCHERTZER, D., « Universal Multifractals and Ocean patchiness Phytoplankton, physical fields and coastal heterogeneity », *J. Plankton Res.*, 23, n° pp. 117-141, 2001d.
- LUCRECE, *De Rerum Natura*, Arléa, (Paris), -50.
- MANDELBROT, B., « Self-affine fractal sets, I: The basic fractal dimensions », in *Fractals in Physics*, edited by L. Pietronero et E. Tosatti, pp. 3-16, North-Holland, (Amsterdam), 1985.
- MANDELBROT, B., « Random multifractals: negative dimensions and the resulting limitations of the thermodynamic formalism », in *Turbulence and Stochastic Processes*, edited by J. C. R. Hunt, O. M. Philips et D. Williams, The Royal Society, (London), 1991.
- MANDELBROT, B.B., « How long is the coastline of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension », *Science*, 155, n° pp. 636-638, 1967.
- MANDELBROT, B.B., « Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier », *Journal of Fluid Mechanics*, 62, n° pp. 331-350, 1974.
- MANDELBROT, B.B., *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, Flammarion, (Paris), 1975.
- MANDELBROT, B.B., *Fractals, form, chance and dimension*, Freeman, (San Francisco), 1977.
- MANDELBROT, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, (San Francisco), 1983.
- MARSAN, D., SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Causal Space-Time Multifractal modelling of rain », *J. Geophys. Res.*, D 31, n° 26, pp. 26,333-26346, 1996.
- METAIS, O. et LESIEUR, M., « Statistical predictability of decaying turbulence », *Journal of Atmospheric Sciences*, 43, n° pp. 857-870, 1986.
- MILLER, E.E. et MILLER, R.D., « Theory of capillary flow: I. Experimental », *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 19, n° pp. 271-275, 1955a.
- MILLER, R.D. et MILLER, E.E., « Theory of capillary flow: II. Practical implications », *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 19, n° pp. 267-271, 1955b.
- MONIN, A.S., *Weather forecasting as a problem in physics*, MIT press, (Boston Ma), 1972.
- MOREL, P. et LARCHEVEQUE, M., « Relative Dispersion of Constant Level Ballons in the 200 mb General Circulation », *Journal of Atmospheric Sciences*, 31, n° pp. 2189-2196, 1974.
- NAUD, C., SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Fractional Integration and radiative transfer in multifractal atmospheres », in *Stochastic Models in Geosystems*, edited by W. Woyczynski et S. Molchansov, pp. 239-267, Springer-Verlag, 1996.
- OBUKHOV, A., « Some specific features of atmospheric turbulence », *Journal of Geophysical Research*, 67, n° pp. 3011, 1962.

- OLSSON, J. et NIEMCZYNOWICZ, J., « Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions », *J. of Hydrol.*, 187, n° pp. 29-43, 1996.
- OONO, Y., *Progr. theor. phys. Suppl.*, 99, n° pp. 165, 1989.
- ORLANSKI, I., « A rational subdivision of scales for atmospheric processes », *Bull. Amer. Met. Soc.*, 56, n° pp. 527-530, 1975.
- PANDEY, G., LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « Multifractal Analysis Including Extremes of Daily River Flow Series for Basins one to a million square kilometers », *J. Hydrology*, 208, n° pp. 62-81, 1998.
- PARETO, V., *Cours d'Economie Politique*, (Lausanne), 1897.
- PARISI, G. et FRISCH, U., « On the singularity structure of fully developed turbulence », in *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, edited by M. Ghil, R. Benzi et G. Parisi, pp. 84-88, North Holland, (Amsterdam), 1985.
- PECKNOLD, S., LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., HOOGE, C. et MALOUIN, J.F., « The simulation of universal multifractals », in *Cellular Automata: prospects in astronomy and astrophysics*, edited by J. M. Perdang et A. Lejeune, pp. 228-267, World Scientific, 1993.
- PEDLOSKY, J., *Geophysical fluid Dynamics*, Springer-Verlag, (Berlin, Heidelberg, New-York), 1979.
- PEITGEN, H.O. et SAUPE, D., *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, 1988.
- PERRIN, J., *Les Atomes*, NRF-Gallimard, (Paris), 1913.
- PEYRIERE, J., « Turbulence et dimension de Hausdorff », *Comptes Rendus (Paris)*, 278A, n° pp. 567-569, 1974.
- RICHARDSON, L.F., « Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph », *Proc. Roy. Soc.*, A110, n° pp. 709-737, 1926.
- RICHARDSON, L.F., « The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels », *General Systems Yearbook*, 6, n° pp. 139-187, 1961.
- ROBINSON, G.D., « The predictability of a dissipative flow », *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 97, n° pp. 300-312, 1971.
- RODRIGUEZ-ITURBE, I. et RINALDO, A., *Fractal River Basins: Chance and Self-organization*, Cambridge University Press, (Cambridge), 1997.
- SALVADORI, G., RATTI, S., BELLI, G., LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « Multifractal and Fourier analysis of Seveso pollution », *J. of Toxicological and Environ. Chem.*, 43, n° pp. 63-76, 1994.
- SAPOVAL, B., BALDASSARI, A. et GABRIELLI, A., « Self-Stabilized Fractality of Seacoasts through Damped Erosion », *Physical Review Letter*, 93, n° pp. 098501, 2004.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « On the Dimension of Atmospheric motions », in *Turbulence and Chaotic phenomena in Fluids*, edited by T. Tatsumi, pp. 505-512, Elsevier Science Publishers B. V., (Amsterdam), 1984.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « The dimension and intermittency of atmospheric dynamics », in *Turbulent Shear Flow 4*, edited by B. Launder, pp. 7-33, Springer-Verlag, 1985a.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Generalised scale invariance in turbulent phenomena », *Physico-Chemical Hydrodynamics Journal*, 6, n° pp. 623-635, 1985b.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Generalised scale invariance and anisotropic inhomogeneous fractals in turbulence », in *Fractals in Physics*, edited by L. Pietronero et E. Tosatti, pp. 457-460, North-Holland, (Amsterdam), 1986.

- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Physical modeling and Analysis of Rain and Clouds by Anisotropic Scaling of Multiplicative Processes », *Journal of Geophysical Research*, D 8, n° 8, pp. 9693-9714, 1987.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Nonlinear geodynamical variability: multiple singularities, universality and observables », in *Non-linear variability in geophysics: Scaling and Fractals*, edited by D. Schertzer et S. Lovejoy, pp. 41-82, Kluwer, 1991.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Hard and Soft Multifractal processes », *Physica A*, 185, n° pp. 187-194, 1992.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Universal Multifractals do Exist! », *Journal of Applied Meteorology*, 36, n° pp. 1296-1303, 1997.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Space-time Complexity and Multifractal Predictability », *Physica A*, 338, n° 1-2, pp. 173-186, 2004a.
- SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Uncertainty and Predictability in Geophysics: Chaos and Multifractal Insights », in *State of the Planet*, edited by S. Sparks, pp. 317-334, AGU, (Washington), 2004b.
- SCHERTZER, D., LOVEJOY, S. et HUBERT, P., « An Introduction to Stochastic Multifractal Fields », in *ISFMA Symposium on Environmental Science and Engineering with related Mathematical Problems*, edited by A. Ern et W. Liu, pp. 106--179, High Education Press, (Beijing), 2002.
- SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., SCHMITT, F., TCHIGUIRINSKAIA, I. et MARSAN, D., « Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency », *Fractals*, 5, n° 3, pp. 427-471, 1997.
- SEED, A., « A dynamic and spatial scaling approach to advection forecasting », *J. Applied Met.*, n° pp. 2002.
- SEURONT, L., SCHMITT, F., LAGADEUC, Y., SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Universal Multifractal analysis as a tool to characterize multiscale intermittent patterns: example of phytoplankton distribution in turbulent coastal waters », *J. Plankton Res.*, 21, n° 5, pp. 877-922, 1999.
- STEINHAUS, H., « Length, Shape and Area », *Colloquium Mathematicum*, III, n° pp. 1-13, 1954.
- TAYLOR, G.I., « The spectrum of turbulence », *Proceedings of the Royal Society of London A*, 164, n° 919, pp. 476-490, 1938.
- TCHIGUIRINSKAIA, I., « Scale invariance and stratification: the unified multifractal model of hydraulic conductivity », *Fractals*, 10, n° 3, pp. 329-334, 2002.
- TCHIGUIRINSKAIA, I., BONNEL, M. et HUBERT, P., « Scales in Hydrology and Water Management », édité par IAHS, Wallingford U.K., pp. 170, 2004a.
- TCHIGUIRINSKAIA, I., SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., HUBERT, P. et BENDJOUDI, H., « Techniques multifractales et gestion du cycle de l'eau », in *Méthodes pour les signaux complexes en traitement d'image*, edited by A. T. J.P. Nadal, H. Yahia, pp. 67-75, INRIA, (Rocquencourt), 2004b.
- TESSIER, Y., LOVEJOY, S., HUBERT, P., SCHERTZER, D. et PECKNOLD, S., « Multifractal analysis and modeling of Rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions », *J. Geophy. Res.*, 31D, n° pp. 26,427-426,440, 1996.
- TESSIER, Y., LOVEJOY, S. et SCHERTZER, D., « Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds », *Journal of Applied Meteorology*, 32, n° 2, pp. 223-250, 1993.
- VAN DER HOVEN, I., « Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from .0007 to 900 cycles per hour », *Journal of Meteorology*, 14, n° pp. 160-164, 1957.

- WEYL, H., *Symmetry*, Princeton University Press, (Princeton, NJ), 1952.
- WILSON, J., SCHERTZER, D. et LOVEJOY, S., « Physically based modelling by multiplicative cascade processes », in *Non-linear variability in geophysics: Scaling and Fractals*, edited by D. Schertzer et S. Lovejoy, pp. 185-208, Kluwer, (Dordrecht), 1991.
- YAGLOM, A.M., « The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval », *Sov. Phys. Dokl.*, 2, n° pp. 26-30, 1966.
- ZEE, A., *Fearful Symmetry: the Search for beauty in Modern Physics*, Colliers Books, Macmillan publishing Compagny, (New-York), 1986.